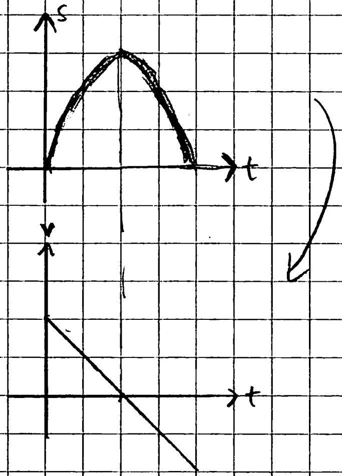
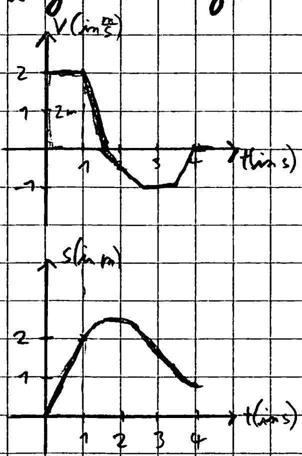
Kap. III: Integralrechnung

Rekonstruieren des Bestands

Beispiel: Ort-Zeit-Diagramm und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm



Ableitung



Der Flächeninhalt gibt hier die zurückgelegte Strecke an! (Einheit: $1\frac{m}{s} \cdot 1s = 1m$)

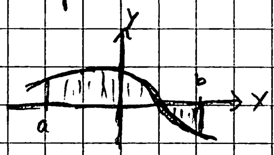
Orientierter Flächeninhalt:

$S = +2 + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) + (-1) + (-\frac{1}{4})$

$S = \frac{3}{4}$ Ort am Ende der Bewegung

Das Integral

Definition



Der orientierte Flächeninhalt, den der Graph der Funktion f mit der x-Achse zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze b einschließt, heißt Integral von f über dem Intervall [a; b].

Man schreibt dafür: $\int_a^b f(x)\,dx$ (lies: Integral von f(x) dx von a bis b)

Die Funktion f(x) heißt Integrand.

Beispiele

a) $\int_0^4 2\,dx = 8$ $f(x) = 2$ $a = 0$ $b = 4$

b) $\int_{-3}^{4} x\,dx = 3{,}5$

c) $\int_{-2}^{0} -x\,dx = 2$

d) $\int_{-1}^{2} (\frac{1}{2}x + 1)\,dx = \cancel{0}\ 3{,}75$

e) $\int_1^4 (-x + 2)\,dx =$

Näherungsweise Berechnung von Integralen

1.) Die Untersumme

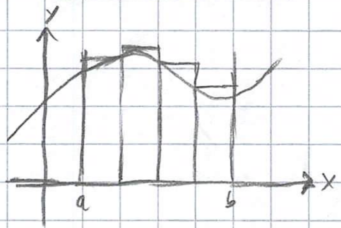
n Teilintervalle der Breite $h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$

$f(x_i)$ Minimum der Funktion im i-ten Intervall

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot f(x_1) + h\, f(x_2) \ldots + h\, f(x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

2.) Die Obersumme



$f(x_i)$ Maximum im i-ten Intervall

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

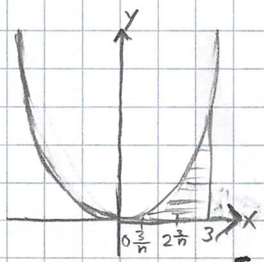
Ein exaktes Ergebnis erhalten wir über den Grenzwert für $n \to \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Definition

Es gibt (wenige) Funktionen, bei denen der Grenzwert der Obersumme und der Untersumme nicht übereinstimmen. Solche Funktionen heißen nicht integrierbar.

Beispiel zur Integralberechnung: $\int_0^3 x^2\,dx$



Flächeninhalt

dieser krummlinig

begrenzten Fläche

Das Intervall $[0;3]$ wird in n Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

z.B. für die Obersumme gilt:

$x_1 = \frac{3}{n},\quad x_2 = 2 \cdot \frac{3}{n}, \ldots \quad x_n = n \cdot \frac{3}{n} = 3$

$$\int_0^3 x^2\,dx \approx f\left(\frac{3}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} + f\left(2\,\frac{3}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} + \ldots f\left(n\,\frac{3}{n}\right) \cdot \frac{3}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(i\,\frac{3}{n}\right) \cdot \frac{3}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(i\,\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n} \qquad (f(x) = x^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{27}{n^3} \cdot i^2$$

Rückseite!

$= \frac{27}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$ (Ausklammern)

$= \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (Formelsammlung) $n \cdot 2n^2 + n + 2n + 1$

$= \frac{18n^3 + 27n^2 + 9n}{2n^3}$

$= \frac{18n^3}{2n^3} + \frac{27n^2}{2n^3} + \frac{9n}{2n^3}$

$= 9 + \frac{27}{n} + \frac{9}{2n^2}$

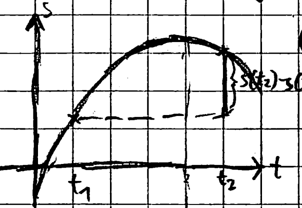
$\int_0^3 x^2 \, dx = \lim_{n \to \infty} \left(9 + \underbrace{\frac{27}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2n^2}}_{\to 0}\right)$

$= 9$

$\Rightarrow$ Ganze Zahl!

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

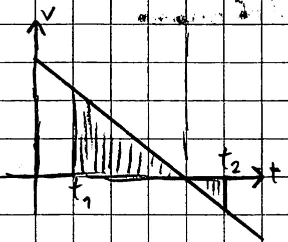
Bsp.: Ort und Geschwindigkeit



(senkrechter Wurf nach oben)

$v(t) = s'(t)$

$\int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt$ beschreibt die gesamte Ortsänderung im Zeitraum $[t_1; t_2]$



$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt = s(t_2) - s(t_1)$

$\int_{t_1}^{t_2} s'(t) \, dt = s(t_2) - s(t_1)$

$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$

Die Funktion ~~f~~ $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ heißt Stammfunktion von f.

Beispiele für Stammfunktionen

a) $f(x) = 2x$ $F(x) = x^2$

b) $f(x) = x$ $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

d) $f(x) = x^3$ $F(x) = \frac{1}{4}x^4$

e) $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

f) $f(x) = 7x^3$ $F(x) = \frac{7}{4}x^4$

g) $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$ $G(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$

h) $h(x) = 0$ $H(x) = 0$ $\cancel{(x \in \mathbb{R})}$

i) $i(x) = e^x$ $I(x) = e^x$

j) $f(x) = \sin(x)$ $F(x) = -\cos(x)$

Anzahl der Stammfunktionen

z. B. $f(x)=3x \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2}x^2+c \quad (c \in \mathbb{R})$

Satz: Sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei unterschiedliche Stammfunktionen der Funktion $f(x)$, so unterscheiden sich $F(x)$ und $G(x)$ nur durch eine Konstante c, d. h. $F(x)=G(x)+c$.

Beweis:

Voraussetzungen: $F'(x)=f(x)$

$G'(x)=f(x)$

$F(x)\neq G(x)$

Wir betrachten eine neue Funktion $\underbrace{(F-G)(x)}_{h(x)=}=F(x)-G(x)$

$h'(x)=F'(x)-G'(x)=0$

$\Rightarrow h(x)=c \quad (c\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow F(x)-G(x)=c$ q. e. d.

Der Hauptsatz d. D. u. I.r.

Ist die Funktion f integrierbar und ist F eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$

Weitere Schreibweisen dafür: $[F(x)]_a^b$

Beispiele:

1) $\int_0^3 x^2\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = 9$

2) $\int_{-1}^{5} (\frac{1}{2}x-2)\,dx = [\frac{1}{4}x^2-2x]_{-1}^{5} = (\frac{1}{4}\cdot 5^2 - 2\cdot 5)-(\frac{1}{4}\cdot(-1)^2-2(-1)) = -6$

3) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx = [\frac{1}{4}x^4]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}2^4 - \frac{1}{4}\cdot(-2)^4 = 0$

Regeln für Stammfunktionen und Integrale

Potenzregel: $f(x)=x^r \quad (r\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$

$F(x)=\frac{1}{r+1}\cdot x^{r+1}$

Summenregel: $f(x)=u(x)+v(x) \Rightarrow F(x)=U(x)+V(x)$

Faktorregel: $f(x)=c\cdot u(x) \Rightarrow F(x)=c\cdot U(x)$

Es gibt keine (einfache) Regel für Stammfunktionen von Produkten!

Die Kettenregel lässt sich nur in speziellen Fällen umkehren:
Lineare Substitution

Bsp: 1) $f(x)=\sin(7x+5) \Rightarrow F(x)=-\frac{1}{7}\cos(7x+5)$

2) $g(x)=\cos(x^2) \Rightarrow F(x)=\cancel{\frac{1}{2}x\sin(x^2)}$

Begründung: $F'(x)=\frac{1}{7}\sin(7x+5)\cdot 7=f(x)$

$G'(x)=\frac{1}{2}x\cos(x^2)\cdot 2x+\underbrace{(-\frac{1}{2}x^2)\cdot\sin(x^2)}_{\text{Produktregel}}$

(Rückseite!)

Regel

Ist bei der Verkettung $f(x) = u(v(x))$ die innere Funktion linear, d.h. $v(x) = m \cdot x + c$,

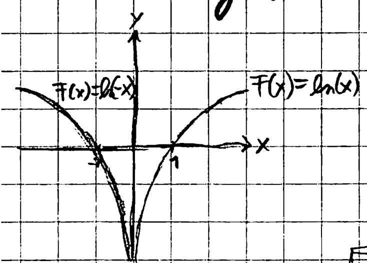
dann gilt: $\boxed{F(x) = \frac{1}{m} \cdot U(v(x))}$, wobei $U(x)$ die Stammfunktion von $u(x)$ ist

Bsp.: $f(x) = \frac{3}{(6x-4)^2}$ $\quad u(x) = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$ $\quad \Rightarrow \quad U(x) = -3x^{-1} = -\frac{3}{x}$

$F(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{3}{6x-4}\right) = -\frac{1}{12x-8}$

Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

Für $x > 0$ gilt: $F(x) = \ln(x)$, weil $F'(x) = \frac{1}{x}$

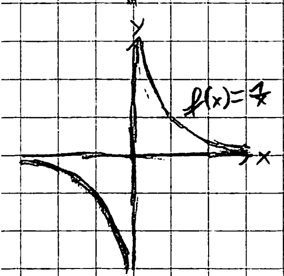


Für $x < 0$ gilt:

$F(x) = \ln(-x)$,

weil $F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln|x|}$$



Da $f(x)$ einen Sprung hat („nicht stetig" ist), darf Null nicht zwischen den Integrationsgrenzen liegen.

Regeln für Integrale

1.) $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

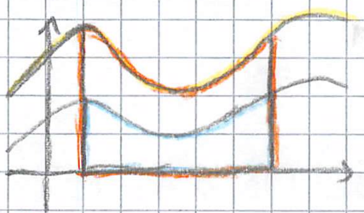
2.) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

1.) und 2.) heißen Linearität des Integrals

Beweis von 1.)

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = [c \cdot F(x)]_a^b = c \cdot F(b) - c \cdot F(a)$$
$$= c \cdot (F(b) - F(a)) = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx \qquad \square$$

Anschaulich



$c = 2$

$g(x) = 2 \cdot f(x)$

$$\int_a^b g(x)\,dx = 2 \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

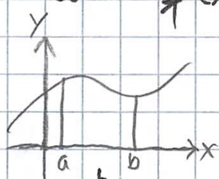
3. Intervalladditivität

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

4. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

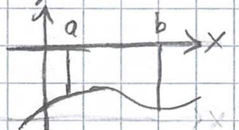
Nicht-Orientierte Flächeninhalte

1. Fall: $f(x) > 0$



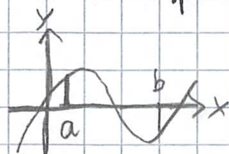
$A = \int_a^b f(x)\,dx$

2. Fall: $f(x) < 0$



$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$= -\int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \int_a^b (-f(x))\,dx$$
$$\left(= \int_a^b |f(x)|\,dx\right)$$

3. Fall: $f(x) \gtrless 0$



Zuerst Nullstellen bestimmen!

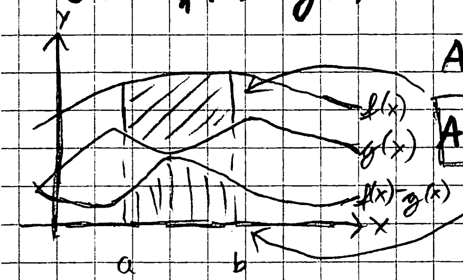
$$A = \int_a^n f(x)\,dx + \left|\int_n^b f(x)\,dx\right|$$
$$\left(= \int_a^b |f(x)|\,dx\right)$$

Bemerkung: $\int_a^b |f(x)|\,dx \geq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

(Rückseite!)

Flächen zwischen Schaubildern

1. Fall: $f(x) > g(x)$

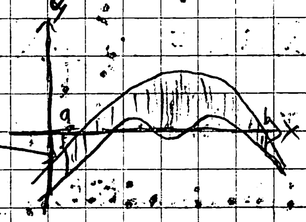


$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\boxed{A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx}$$

obere F. − untere F.

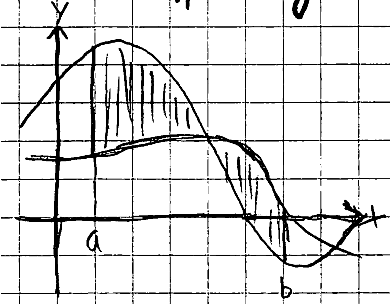
Ergänzung



Gleicher Ansatz

⇒ Verschiebung nach oben

2. Fall: $f(x) \gtrless g(x)$



Schnittstelle bestimmen!

$$A = \int_a^s \big(g(x) - f(x)\big)\,dx + \int_s^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Die Integralfunktion

Definition: Sei f eine integrierbare Funktion und sei $u \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion $I_u(x) = \int_u^x f(t)\,dt$ Integralfunktion von f zur unteren Grenze u.

Bemerkung: $f(t)$, da x als Integrationsgrenze vorkommt

Beispiele:

$f(x) = x$ (bzw. $f(x) = \frac{1}{2}e^{3x-1}$)

Bestimme jeweils ~~die~~ $I_0(x)$ (und $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_{-1}(x)$) in integralfreier Schreibweise

$I_0(x) = \int_0^x t\,dt = \cancel{\frac{1}{2}t^2}\,\frac{1}{2}x^2$ $\qquad I_0(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2}e^{3t-1}\right)dt = \frac{1}{6}e^{3x-1}$

$I_1(x) = \int_1^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ $\qquad I_1(x) =$

$I_2(x) = \int_2^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2 - 2$ $\qquad I_2(x) =$

$I_{-1}(x) = \int_{-1}^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ $\qquad I_{-1}(x) =$

Satz: Die Integralfunktion $I_u(x)$ ist diejenige Stammfunktion von $F(x)$ von $f(x)$ mit $F(u) = 0$

Folgerung: Jede Integralfunktion hat mind. eine Nullstelle. Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion, aber nicht umgekehrt

Bedeutung: $f(t)$ beschreibt den Zu-/Abfluss in ein Gefäß und zum Zeitpunkt u sei kein Wasser im Gefäß. Dann beschreibt $I_u(t)$ die Wassermenge im Gefäß.

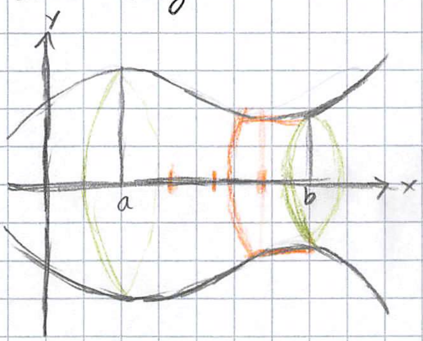
Volumen von Rotationskörpern

S. 101 oben

a) $V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (2\,cm)^2 \cdot 1\,cm = 4\pi\,cm^3$

b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (2\,cm)^2 \cdot 2\,cm = \frac{8}{3}\pi\,cm^3$

c) Kreisring



Zur näherungsweisen Berechnung des Volumens des Rotationskörpers unterteilen wir $[a;b]$ in n gleichgroße Teilintervalle und nähern den Körper in jedem Intervall durch einen Zylinder an.

$$\Rightarrow V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot (f(x_i))^2 \cdot h \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^2 \cdot h$$

$$\Rightarrow V = \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^2 \cdot h$$

$$= \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^2 \cdot h$$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx}$$

Beispiel: S. 102 Nr. 1

a) $V = \pi \int_{-1}^{2} (\sqrt{x+1})^2\,dx = \pi \int_{-1}^{2} (x+1)\,dx$

$= \pi\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{2}$

$= \pi\left(4 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$= 4{,}5\pi$ VE

b) $V = \pi \int_1^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^3 (x^{-2})\,dx$

$= \pi\left[-x^{-1}\right]_1^3$

$= \frac{2}{3}\pi$ VE

c) $V = \pi \int_{-2}^{2} \cancel{\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)^2} (x^2-4)^2\,dx = \pi \int_{-2}^{2} (x^2-4)\cdot(x^2-4)\,dx = \pi \int_{-2}^{2} (x^4 + 8x^2 + 16)$

$= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_{-2}^{2}$

$= \frac{512}{15}\pi$ VE

Mittelwerte von Funktionen

Mittelwert bei endlich vielen Werten $y_1; y_2; y_3; \dots y_n$:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots y_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Mittelwert bei unendlich vielen Werten:

$$\bar{y} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Vgl. mit der Definition des Integrals:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad \text{(Ausklammern)}$$

$$= (b-a) \cdot \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)}_{= \bar{y}} \qquad (y_i = f(x_i))$$

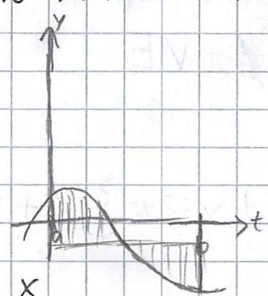
$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Definition

Die Zahl $\boxed{\bar{y} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx}$ heißt Mittelwert der Funktion f im Intervall $[a; b]$.

Anschaulicher

Die Funktion f beschreibe den Zu- bzw. Abfluss in ein Becken.



$$\underbrace{(b-a)}_{\text{Zeitspanne}} \cdot \underbrace{\bar{y}}_{\text{mittlerer Zufluss}} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Gesamter Zufluss im Intervalle } [a;b]}$$

Fläche über dem Mittelwert muss gleich der Fläche unter dem Mittelwert sein.

Wdh.: Quotienten von Funktionen

$f(x)=\frac{z(x)}{n(x)}$

Def.: Wenn $z(x)$ und $n(x)$ ganzrationale Funktionen sind, dann heißt $f(x)$ gebrochenrationale Funktion.

Definitionsmenge $\mathbb{D}$

$n(x)=0 \Rightarrow x_1; x_2; \ldots$ (Definitionslücken

$\Rightarrow \mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{x_1; x_2; x_3; \ldots\}$

Verhalten in der ~~Umf~~ Umgebung einer Definitionslücke

1. Fall: $z(x_1)\neq 0 \Rightarrow x_1$ ist eine Polstelle, das Schaubild hat die senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x=x_1$

a) mit Vorzeichenwechsel

Einfache (oder dreifache, …) Nullstelle von $n(x)$

b) ohne Vorzeichenwechsel

Doppelte (4-fache, …) Nullstelle von $n(x)$

2. Fall: $z(x_1)=0$

Dann kann man bei $f(x)$ kürzen: $\frac{z(x)}{n(x)}=\frac{(x-x_1)\cdot\tilde{z}(x)}{(x-x_1)\cdot\tilde{n}(x)}=\frac{\tilde{z}(x)}{\tilde{n}(x)}$

a) $\tilde{n}(x_1)\neq 0 \Rightarrow$ hebbare Definitionslücke

(ein Punkt im Graph fehlt!)

b) $\tilde{n}(x_1) = 0$

1. Fall: $\tilde{z}(x_1 \neq 0) \Rightarrow$ Polstelle

2. Fall $\tilde{z}(x_1 = 0) \Rightarrow$ kürzen!

Nullstellen

$z(x)=0$

$n(x)\neq 0$, d.h. man ~~mü~~ muss prüfen, ob die Nullstelle in $\mathbb{D}$ liegt.

waagerechte Asymptoten (Verhalten für $x\to\pm\infty$)

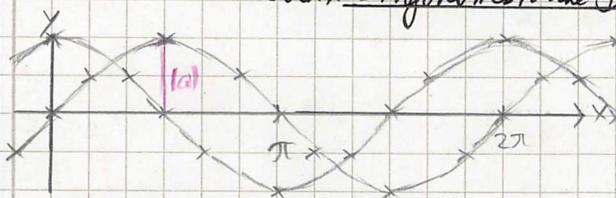
(Exponentialfunktionen konvergieren stärker als Potenzfunktionen)

1) $Grad(z(x)) < Grad(h(x)) \Rightarrow$ x-Achse ist waagerechte Asymptote, $f(x)\to 0$ für $x\to\pm\infty$

2) $Grad(z(x)) = Grad(h(x))$ Bsp.: $\frac{2x^4+1}{3x^4+x^2} \Rightarrow y=\frac{2}{3}$ ist die Gleichung der waagerechten Asymptote $f(x)\to\frac{2}{3}$ für $x\to\pm\infty$

3) $Grad(z(x)) > Grad(h(x)) \Rightarrow$ keine waagerechte Asymptote

Wdh.: Trigonometrische Funktionen



$f(x)=a\cdot\sin(b(x-c))+d$

a: Streckung in y-Richtung

+ ggf. Spiegelung an der x-Achse

$|a|$: Amplitude

b: Stauchung in x-Richtung

+ ggf. Spiegelung an der y-Achse

Periode: $p=\frac{2\pi}{|b|}$ $\quad\left(T=\frac{2\pi}{\omega}\right)$

c: Verschiebung in x-Richtung

d: Verschiebung in y-Richtung

Reihenfolge beachten

- beim Zeichnen $a\to b\to c\to d$
- beim Ablesen $d\to c\to b\to a$

Trigonometrische Gleichungen

Bsp.: $\sin(x)=0{,}7$ $\quad x_1=\sin^{-1}(0{,}7)+k\cdot 2\pi \quad x_2=\pi-x_1+k\cdot 2\pi$

$\cos(x)=-0{,}4$ $\quad x_1=\cos^{-1}(-0{,}4)+k\cdot 2\pi \quad x_2=-x_1+k\cdot 2\pi$

Uneigentliche Integrale

Unendliche Summen

Bsp.: 1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots=\infty$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=1$

Beweis

1.) $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$

$=\infty$

2.) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots$

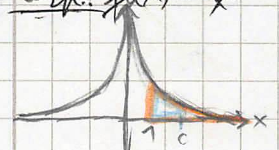
$=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$

Unbegrenzte Flächen

Bsp.: $f(x)=\frac{2}{x^2}$

Schreibweise für den Flächeninhalt dieser nach rechts unbegrenzten Fläche: $\int_1^\infty f(x)\,dx$



① Näherungswert: $\int_1^c \frac{2}{x^2}\,dx=\left[-\frac{2}{x}\right]_1^c$

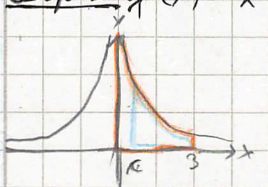
$=-\frac{2}{c}+2=2-\frac{2}{c}$

② $\lim_{c\to\infty}\left(2-\frac{2}{c}\right)=2$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx=2$

Bsp. 2: $f(x)=\frac{2}{x^2}$

Schreibweise: $\int_0^3 f(x)\,dx$



(Achtung: das ist ein uneigentliches Integral!)

$\int_c^3 \frac{2}{x^2}\,dx=\left[-\frac{2}{x}\right]_c^3$

$=-\frac{2}{3}+\frac{2}{c}=\frac{2}{c}-\frac{2}{3}$

$\lim_{c\to 0}\left(\frac{2}{c}-\frac{2}{3}\right)$ existiert nicht $\quad \frac{2}{c}-\frac{2}{3}\to\infty$